215 – Applications différentiables définies sur un ouvert de R^n. Exemples et applications.

- On commencera par traiter de généralités sur les applications différentiables, on verra les notions de fonctions C^1, différentiables, admettant des dérivées partielles etc, et on fera le lien entre ces notions. On verra ensuite des théorèmes qui nous seront utiles dans la suite (Taylor pour les fq,
- On enchainera sur les théorèmes d'inversion (locale, globale, fct implicites) et on donnera quelques une de leurs nombreuses applications
- On étudiera enfin les points critiques des applications différentiables, et on s'intéressera entre autres aux extremums

U un ouvert de R^n. $f : U \to R^m$

I) <u>Généralités sur la différentiabilité</u>

1) <u>Différentiabilité et différentielle</u>

Déf : f différentiable [Rou 45]

Prop : la différentielle est unique [Rou 46], [Pom 261]

Ex : f linéaire [Rou 48] ; $n=1$ [Rou 48]

Diff du dét [Pom 270]

Prop : $f \to df_a$ est linéaire ; f diff => f continue [Rou 50]

Déf : dérivées directionnelles, dérivées partielles [Rou 49]
matrice jacobienne
gradient

Prop : écrire $df_a(h)$ comme somme des dérivées partielles [Rou 49]

Prop : différentielle d'une composée [Rou 50]

Appl : une norme n'est jamais différentiable en 0 [Pom 265]

2) <u>Différentielles d'ordre supérieur</u>

Déf : f est C_1 si f est différentiable et $a \to Df_a$ est continue [Rou 54]

Schéma récapitulatif avec toutes les implications.

C-ex à la 1ère implication : [Gou 306]

C-ex à la 2e implication : [Rou 49], une fct qui admet des dp mais n'est même pas continue.

Déf : f C^k si f admet des dp C^{k-1} [Rou 296]

Prop : on peut identifier D^kf_a à une forme multilinéaire $(R^n)^k \to R^m$

3) <u>Premiers théorèmes</u>

Th : IAF [Rou 104]

Appl : U connexe. Df_a=0 sur U ⇔ f cste sur U [Rou 105] + [Gou 308]

Th de Schwarz : [Rou294], [Pom276] *(on se sert de l'IAF)*

Th de chgt de var [Gou 334]

Application : intégrale de Gauss [Gou 335]

Formules de Taylor à l'ordre 2 [Pom 277]

II) Théorèmes d'inversion et applications

1) Les théorèmes

Th : inversion locale ; faire un dessin [Rou 188]

Th de changement de coord [Rou 190]

Th : (inversion globale) U ouvert de R^n, f :U->R^n C^1, f injective sur U, et la jacobienne de f en tout point de x est inversible. Alors f(U) est un ouvert de R^n et f est un C^1-difféo [Rou 190]

Th : (TFI) U ouvert de R^n x R^p, et f une function définie sur U de classe C^1. On prend (a,b) tq f(a,b)=0, on suppose que la jacobienne de formée des sérivées partielles par rapport à y est inversible. Alors l'équation f(x,y) peut être résolu localement autour de (a,b) [Rou 192] *(on peut se ramener au TIL)*

Rq : TIL et TFI sont équivalents

Th : différentielle de la fonction implicite [Rou 194]

2) Applications

1ère appl : t->exp(it) est un mph surjectif de groupes *(en effet, la dérivée de exp en 1 est non nulle donc par TIL, c'est un difféo de R sur U au vois de 1. exp(iR) contient donc un ouvert, il est donc ouvert par principe de translation, et donc aussi fermé, par connexité c'est U entier)*

2e appl : racine kième de matrice [BMP 11]

Racines de polynômes
Prop : si P est un polynôme à racine simple x0, alors les polynômes voisins ont une racine voisine de x_0 [BMP 11] *(on mq il existe une appl C^infini f définie sur un voisinage de P dans Rn[X] qui va dans un vois de x0 tq si x=f(P) alors P(x)=0 (TFI))*

Csq : l'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert de Rn[X] [BMP 12] *(Q un polynôme scindé à racines simples x1,…,xn). Pour chaque x_1 il y a une appl lisse f_i définie comme précedemment entre Ui et Vi. Les x_i sont disctincts alors on regarde des vois Vi' autour des xi, disjoints, et on définit Ui' l'image réciproque des Vi'. Les Ui' sont des vois ouverts de Q. Pour P dans l'intersection des Ui', f_i(P) est un polynôme à n racines disctinctes)*

Théorème de submersion
Th : V est une sous variété de R^n de dimension d si en tout point a de V, il existe un voisinage U dans R^n et une fonction f :R^{n}->R^{n-d} tq V∩U=f^-1({0})∩U [Rou 200] *(utilise le TIL)*

Appl : PSL2(C)=SO3(C) *(on utilise le th de submersion (qui utilise lui-même le TIL) et le TIL)*

III) Points critiques et extremums

1) Point critiques

Déf : point critique
Prop : CN d'extremum local [Rou 371]

Ex :

Prop : C un convexe non vide, ouvert. f une fonction convexe sur C. Si a est un point critique, alors f admet un extremum local en a [Rou 381]

Th : type d'extremum [Rou 371] ; dessins ? [Rou 376]

Ex : [Rou377]

2) Lemme de Morse [Rou]

Le théorème précédent nous dit ce qui se passe si la différentielle seconde est dp où dn. Le lemme de Morse va nous dire ce qui se passe dans tous les autres cas où la différentielle seconde est non dégénérée.

Prop : si une matrice symétrique S n'est pas trop loin d'une matrice symétrique non dégénérée S0 alors elle lui est congrue et la matrice de congruence dépend de manière C1 de S0

Appl : l'ensemble des fq de signature (p,q) est un ouvert dans Sn

Th : lemme de Morse

3) Extremums sous contrainte

Th : Extrema liés [Gou]

Appl : inégalité de Hadamard [GT]

Appl : inégalité arithmético-géométrique [Gourdon]

Appl : optimisation du volume d'une boîte [Rou 407]

Développements :

1 - SO3(C) isomorphe à PSL_2(C) [???] (**)
2 - Lemme de Morse [Rou 209 + 354] (**)

Bibliographie :

[Rou]
[Pom]
[GT]
[Gou]
[BMP]
[Pom]

Rapport jury 2005-2009 : il est judicieux que les candidats aient une vision à peu près claire de ce qu'est la différentielle d'une fonction et soient capables de définir la notion de fonctions de classe C^k . Il faut savoir si une fonction dont les dérivées partielles sont continues est différentiable et il faut surtout savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction.
Les exemples annoncés par le candidat doivent non seulement illustrer les notions présentées, mais aussi pouvoir être expliqués par le candidat. Par exemple certains donnent une formule pour la différentielle de l'inversion d'une matrice sans pouvoir la retrouver. Les leçons concernant les applications différentiables restent parfois extrêmement formelles. Des théorèmes, tel que le théorème des fonctions implicites, doivent être illustres par des exemples géométriques. Il est également surprenant de voir un candidat incapable de déterminer l'espace tangent à une courbe paramétrée.